Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas. MA1111
Tercer Parcial. Sept-Dic 2007. (40 pts).

Nombre:______________________Carnét No.______________________

1. Dada la función
$$f(x) = \frac{x^2+1}{1-x},$$
determine:
    a) Dominio (1 pt).
    b) Puntos de corte con los ejes coordenados (1 pt).
    c) Asíntotas (3 pts).
    d) Puntos criticos (2 pts).
    e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 pts).
    f) Intervalos de concavidad y convexidad (3 pts).
    g) Puntos de inflexión (1 pt).
    h) Extremos locales (1 pt).
    i) Dibuje su gráfica (2 pts). (Total: 17 pts).

2. Calcular $\frac{dy}{dx}$ si $y = f(x)$ es derivable y está definida implícitamente mediante la ecuación $\mathrm{Sen}(2x + y) = y^3\mathrm{Cos}(x)$. (5 pts).

3. Encuentre los puntos de la curva $x^2 - y^2 + 16 = 0$ que están más cerca del punto $(6, 0)$. (7 pts).

4. Calcule
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{\pi}{4}\right). \quad \text{(6 pts).}$$

5. Sea $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ un polinomio no constante. Utilizando el teorema de Rolle, demuestre que si a y b son dos ceros consecutivos de $P'(x)$, entonces existe un único valor $c \in (a, b)$ tal que $P(c) = 0$. (5 pts).

Respuestas:
Pregunta 1:
a)Dominio de f: Necesitamos que $1-x \neq 0$, por lo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
b)Puntos de corte con los ejes: Observamos que $x^2+1 \neq 0$, así no hay cortes con el eje X. Como $f(0) = 1$, la gráfica corta al eje Y en $(0,1)$.
c)Asintotas:
Por el criterio de polinomios tenemos que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{1-x} = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{1-x} = \infty,$$

luego no hay asintotas horizontales.
Por otra parte,

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{1-x} = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = \infty,$$

así $x = 1$ es asintota vertical.
Calculando,

$$a := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-x^2} = -1$$

y

$$b := \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{1-x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1.$$

El caso es similar si $x \to -\infty$ y concluimos que $y = -x-1$ es asintota oblícua.
d)Puntos criticos:
Aplicando la regla del cociente y la regla de la cadena, derivamos:

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (x^2+1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x+1-x^2}{(1-x)^2}.$$

En consecuencia, $f'(x) = 0$ si y sólo si $-x^2+2x+1 = 0$ y los puntos criticos de f son $x_1 = 1-\sqrt{2} \simeq -0.4$ y $x_2 = 1+\sqrt{2} \simeq 2.4$.
e)Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
Como $-x^2+2x+1 = -(x+0.4)(x-2.4)$, observamos que

	$x \in (-\infty, -0.4)$	$x \in (-0.4, 2.4)$	$x \in (2.4, \infty)$
$x+0.4$	-	+	+
$x-2.4$	-	-	+
$(x+0.4)(x-2.4)$	+	-	+

concluyendo que:
$f'(x) > 0$ si $x \in (-0.4, 2.4)$ y en consecuencia f es creciente.
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -0.4) \cup (2.4, \infty)$ y por lo tanto f es decreciente.
f)Intervalos de concavidad y convexidad: Derivando y simplificando,

$$f''(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 - (2x+1-x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Concluimos que:
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ y en este intervalo f es concava hacia arriba.
$f'(x) < 0$ si $x > 1$ y en este intervalo f es concava hacia abajo.
g)Puntos de inflexión: No hay.
h)Extremos locales: Mediante el criterio de la primera derivada, concluimos que f presenta en $x = -0.4$ un mínimo relativo y en $x = 2.4$ un máximo relativo. Además, $f(-0.4) \simeq 0.8$ y $f(2.4) \simeq -4.8$.
i)Dibujo de la gráfica: Ver la última página.

Pregunta 2:
Derivando implícitamente:

$$\cos(2x+y)\left[2 + \frac{dy}{dx}\right] = 3y^2\frac{dy}{dx}\cos x - y^3 \operatorname{sen} x.$$

Despejando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(2x+y) + y^3\operatorname{sen} x}{3y^2\cos x - \cos(2x+y)}.$$

Pregunta 3:
Vamos a aplicar la fórmula de distancia entre los puntos (x, y) e $(6, 0)$, elevada al cuadrado. Como el punto (x, y) pertence a la curva, tenemos que $y^2 = x^2 + 16$ y la función a considerar es

$$f(x) = (x-6)^2 + x^2 + 16.$$

Derivando dos veces,

$$f'(x) = 2(x-6) + 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = 4.$$

$f'(x) = 0$ siempre que $4x - 12 = 0$ y así $x = 3$ es el único punto critico. Además, $f'(x) > 0$ cuando $x > 3$ y $f'(x) < 0$ si $x < 3$. Por el criterio de la primera derivada, concluimos que hay un minimo en $x = 3$. En este caso,

$y^2 = 25$ y los puntos más cercanos son $(3,5)$ y $(3,-5)$.

Pregunta 4:
Aplicando la regla de L'Hopital, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{\pi}{4}}{1/x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+2)^2}\left[\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+(x+1)^2}\right]}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{(x+2)^2+(x+1)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{2x^2+6x+5} = -1/2.
\end{aligned}$$

Pregunta 5:
Supongamos que P tiene dos raices en (a,b). Entonces existen dos valores, $a < \alpha < \beta < b$, tales que $P(\alpha) = P(\beta) = 0$. Como P es un polinomio, es contínuo en $[\alpha,\beta]$ y derivable en (α,β). Aplicando el teorema de Rolle, existe al menos un valor $c \in (\alpha,\beta)$ tal que $P'(c) = 0$. Esto contradice el hecho de que a y b son dos raices consecutivas de P'.

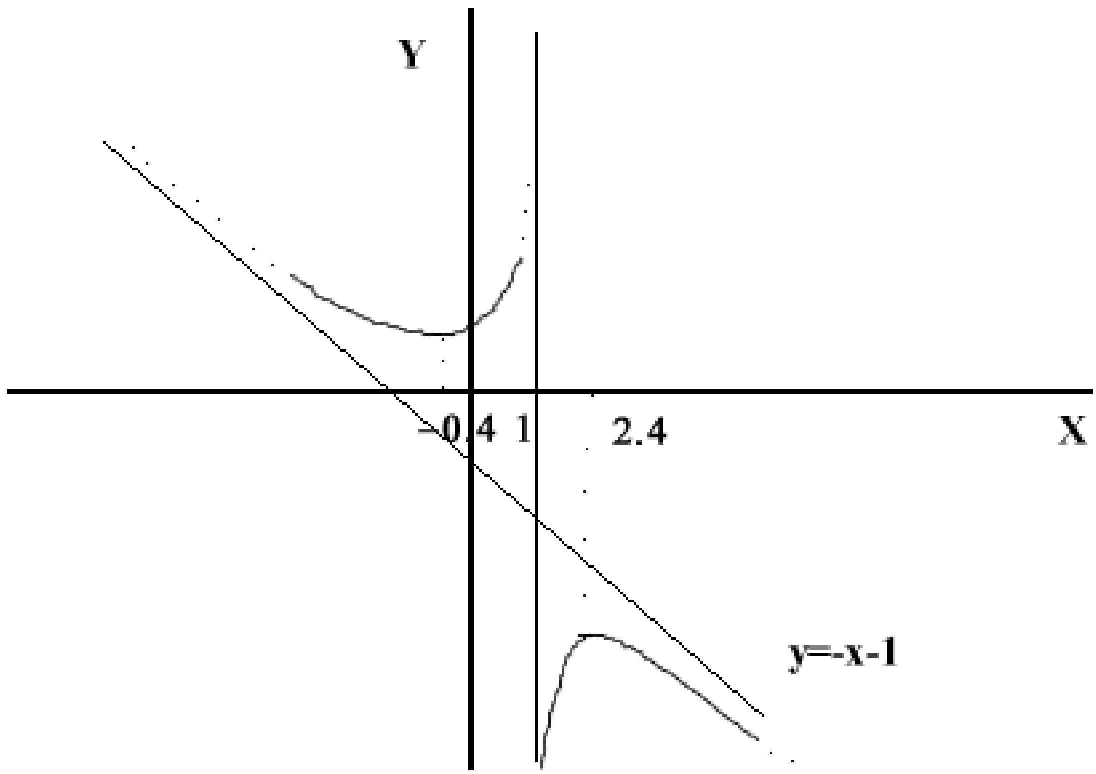

Figure 1: Gráfico de $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x}$.